
The Effect of Specific Volume on classical Failure Model

Homayoun Shaverdi^{1,*}

Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Ilam University, Ilam, Iran

E-mails: h.shaverdi@ilam.ac.ir

*corresponding author

Abstract

The specific volume as one of fundamental parameters in soil mechanics has a great effect on the volume-weight relationships in soils. In this paper, for better modeling the shear strength of soils the effect of this parameter due to the obligation and consistency of the thermo-dynamical principles is discussed and incorporated in the formulation. Based on the thermodynamics principles, volume changes and dilatancy of soil samples must be modified by considering the specific volume. The dissipation by regarding the specific volume is incorporated into the formulation of peak shear strength for the Cam-Clay failure surface. Verification with experimental tests reveals the validity of the proposed formulation.

Keywords

Shear Strength, Thermodynamics Principles, Specific Volume, Granular Soils.

تأثیر حجم مخصوص بر مدل گسیختگی کلاسیک

همایون شاوردی^{۱*}

استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه ایلام، ایلام، ایران

چکیده

حجم ویژه به عنوان یکی از کلیدی‌ترین پارامترهای مکانیک خاک، نقشی اساسی در روابط پایه حجمی-وزنی خاک ایفا می‌کند. در بسیاری از مطالعات گذشته، تأثیر حجم ویژه در مدل‌سازی رفتارهای مختلف خاک، به ویژه در زمینه‌های مرتبط با روابط تنش-کرنش و ارزیابی اتساع خاک، مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله، تأثیر این پارامتر با توجه به اصول ترمودینامیک و ضرورت استفاده از آن برای بهبود مدلسازی روابط تنش-کرنش به دقت بررسی شده است. بر اساس اصول ترمودینامیک، تغییرات حجمی و در نتیجه اتساع نمونه‌های خاکی، باید با توجه به حجم ویژه ذرات خاک در نظر گرفته شود. این بدان معناست که هرگونه تغییر در حجم ویژه تأثیر مستقیمی بر رفتار مکانیکی خاک دارد و در بسیاری از مواقع، نادیده گرفتن این تغییرات منجر به خطاهای جدی در پیش‌بینی رفتار خاک می‌شود. به طور خاص، زوال انرژی در توده‌های خاکی، زمانی که تغییرات حجم ویژه به طور دقیق در سیستم معادلات اصلی لحاظ شوند، قابل تحلیل و ارزیابی است. در این راستا، تغییرات حجم ویژه نه تنها در توزیع تنش‌های داخلی بلکه در محاسبات حداکثر نسبت تنش نیز تأثیرگذار خواهد بود. برای ارزیابی اعتبار این مدل، نتایج بدست آمده از معادلات پیشنهادی با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه شده است. نتایج این مقایسه نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی توانسته است تطابق مناسبی با داده‌های واقعی داشته باشد. این موضوع نشان‌دهنده کارایی و دقت بالای مدل در پیش‌بینی رفتار تنش-کرنش خاک در شرایط مختلف است.

کلمات کلیدی

مقاومت برشی، حجم ویژه، اصول ترمودینامیک، خاک‌های دانه‌ای.

نام نویسنده مسئول: همایون شاوردی

ایمیل نویسنده مسئول: h.shaverdi@ilam.ac.ir

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۳/۰۷/۰۳

تاریخ(های) اصلاح مقاله: ۱۴۰۳/۰۷/۲۲

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۷/۲۴

۱- مقدمه

مدل‌های پایه رفتاری خاک دارد. در نظر گرفتن تغییرات ساختاری در درون خاک باید بر مبنای اصول ترمودینامیک و به تبع آن بر اساس حجم ویژه $v = 1 + e$ (حجم مخصوص) ذرات جامد خاک باشد (لی و دافالیاس ۲۰۱۵) [۵].

یکی از قدیمی‌ترین روابط برای بیان گسیختگی و مقاومت برشی خاک‌ها، مدل حالت بحرانی ارائه شده توسط راسکو و همکاران (۱۹۵۸) [۶] و راسکو اسکافیلد (۱۹۶۳) بود که بعداً کم-کلی نام گرفت. مبنای پایه روابط از اصول کلاسیک ترمودینامیک و زایل‌شدن انرژی در مقیاس ماکرو بدست آمده‌اند. زایل‌شدن انرژی در خاک باید بر اساس حجم ذرات جامد خاک انجام گیرد و نه حجم کلی توده خاک (لی و دافالیاس ۲۰۱۵) [۵].

۲- اعمال قوانین ترمودینامیک

۲-۱- سازگاری ترمودینامیکی محیط پیوسته

تئوری‌های محیط پیوسته از قبیل نظریه پلاستیسیته (خمیری) خاک و مکانیک خاک حالت بحرانی، ریشه در قوانین کلاسیک ترمودینامیک دارند. کاربرد صحیح این روابط بایستی در تطابق با اصول پایه‌ای ترمودینامیک باشد. با فرض ثابت بودن دما، طبق اصل اول و دوم ترمودینامیک رابطه انرژی مطابق معادله زیر خواهد بود:

$$\int_V (\sigma : \delta \epsilon - T \rho) = \int_V (\delta \psi) dV \quad (1)$$

تایلور (۱۹۴۸) [۱] نشان داد که مقاومت برشی خاک‌ها بصورت کلی به دو مولفه اصلی تقسیم می‌شود، یکی مقاومت ناشی از اصطکاک بین ذرات و دیگری مقاومت ناشی از اتساع (دیلاتنسی) خاک. روشی که بر اساس آن پارامترهای تأثیرگذار بر مقاومت برشی از تصحیح رابطه انرژی بدست آمده‌اند. بعدها محققین دیگری نیز همین روش را ادامه دادند (به طور مثال، نیولند و آلی ۱۹۵۷، پوروشاسب و روسکو ۱۹۶۱، و نعمت ناصر ۱۹۸۰) [۲-۴]. در این روش هدف این است که مولفه‌های اصلی مقاومت برشی به صورت مجزا حداقل در بعد بررسی و تحقیق مشخص شوند مضاف بر اینکه مولفه‌های انرژی می‌توانند برای بیان تغییر شکل و مقاومت خاک به شکل مجزا ارائه شده و پارامترهای اصلی برای کاربردهای مهندسی به شکل مستقیم به کار گرفته شوند. از طرف دیگر اصول ترمودینامیک الزاماتی را برای کاربرد معادلات انرژی ارائه می‌کند که عدم استفاده از آن می‌تواند باعث بروز اشتباه و خطا در روابط منبعت از آن شود. هدف از این تحقیق، بکارگرفتن یکی از اصول ترمودینامیک در استخراج روابط انرژی در خاک برای مدل کلاسیک کم-کلی است. برای خاک‌های دانه‌ای مثل ماسه پاسخ مکانیکی در حالت محیط پیوسته بازتابی است از پاسخ اتفاقات پیش‌آمده در بین ذرات. به همین دلیل پارامترهایی که برای زایل‌شدن انرژی در نظر گرفته می‌شوند می‌بایست در تطابق با قوانین ترمودینامیک باشند. یکی از پارامترهای مهم در مقاومت برشی خاک‌ها، اتساع است که نقش مهمی در روابط تنش-کرنش خاک‌ها و

و دافالیاس (۲۰۱۵) [۵، ۱۰]. این حالت فیزیکی در چهارچوب قوانین کلاسیک ترمودینامیک به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{\Sigma} = S : \delta \varepsilon_p^q + P v = C - \phi \quad (6)$$

در رابطه‌ی فوق $\bar{\Sigma}$ نرخ زایل شدن در واحد حجم، v همانطوری که قبلاً گفته شده حجم ویژه (حجم مخصوص) $\phi, v = 1 + e$ انرژی آزاد هلمهولتز و C انرژی آزاد ویژه گیبس برای هر سطح از تنش P است. قسمت اول رابطه‌ی (۶) بیانگر این است که زایل شدن انرژی منحصر در حالت بحرانی براساس کار برشی بوده و قسمت دوم رابطه شرایط دقیق تعادل را بیان می‌کند که در آن تمام ویژگی‌های ترمودینامیکی ثابت هستند. می‌توان نشان داد که قسمت دوم رابطه فوق فقط وابسته به حجم مخصوص v است. این منحصر و یگانه بودن مستقیماً منجر می‌شود به منحصر بودن خط حالت بحرانی در فضای $P - e$ ، فرضی که پایه اساسی مدل کم-کلی است. مطابق قسمت دوم رابطه (۶) تغییرات آن بر اساس تغییرات حجم بصورت زیر خواهد بود:

$$P \delta v = -\delta \phi = -\frac{\partial \hat{\phi}(v)}{\partial v} \delta v \Rightarrow P = -\frac{\partial \hat{\phi}(v)}{\partial v} = \hat{P}(v) \quad (7)$$

رابطه فوق هم بیانگر منحصر بفرود بودن خط حالت بحرانی است و هم اینکه باید تغییرات حجم ویژه را در کاربرد قوانین ترمودینامیک لحاظ نمود.

۲-۳- اعمال روابط ترمودینامیک در مدل کم-کلی

اگرچه این مدل پیشرو یکی از پیشرفت‌های مهم در توسعه مدل‌های خاکی بوده است ولی دارای ایراداتی از لحاظ قوانین ترمودینامیکی می‌باشد (کالینز و هولسی ۱۹۹۷، کالینز و کلی ۲۰۰۲، لی و دافالیاس ۲۰۱۵) [۵، ۱۰، ۱۱]. در این مدل تابع زایل شدگی برابر است با $\delta \phi = MP' \delta \varepsilon_p^q$ که در اینجا M شیب خط حالت بحرانی، P' تنش همه جانبه موثر (در حالت سه محوری $P' = \frac{1}{3}(\sigma_1' + 2\sigma_3')$ و کرنش برشی (در حالت سه محوری $\varepsilon_p^q = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$) است. به دلیل اینکه تغییر شکل‌های فشاری ایزوتروپ (همسان) در این رابطه زایل شدگی مدل نمی‌شوند و همچنین بواسطه اینکه این تغییر شکل‌ها بدون هرگونه زایل شدگی اتفاق می‌افتند، در نتیجه نقض قانون دوم ترمودینامیک است (کالینز و کلی ۲۰۰۲، لی و دافالیاس ۲۰۱۵). اسکافیلد (۲۰۰۰) [۵، ۱۰، ۱۲] تاکید کرد که مدل کم-کلی بر اساس داده‌ها و مشاهدات آزمایشگاهی شکل گرفت و در آن‌ها مشاهده شد که در نبود تغییرات حجمی، انرژی زایل شدگی همیشه برابر بوده است با $MP' \delta \varepsilon_p^q$.

با در نظر گرفتن رابطه (۷) و تنش انحرافی q (در حالت سه محوری $q = \sigma_1 - \sigma_3$) و کرنش حجمی v^p برای رابطه کم-کلی که یک رابطه براساس آزمایش سه محوری است برابر است با ε_p^p (در حالت سه محوری

$$\varepsilon_p^p = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3) \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\hat{P}'(v) \delta \varepsilon_p^p + q \delta \varepsilon_p^q = MP' \varepsilon_p^q \quad (8)$$

که پس از ساده‌سازی و اعمال تغییرات حجم ویژه در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\eta = M - \frac{\delta \varepsilon_p^p}{\delta \varepsilon_p^q} \frac{1}{v} = M - \frac{\delta \varepsilon_p^p}{(1+e) \delta \varepsilon_p^q} \quad (9)$$

که در این رابطه σ تنش کاوشی، T دمای مطلق، ρ نمو انترابی واحد حجم و ψ انرژی هلمهولتز در واحد حجم و V حجم المان است. بایستی توجه کرد که ψ متفاوت است با ϕ برای مقدار انرژی آزاد E چرا که $\phi = \frac{E}{V_s}$ مقدار انرژی اندازه گیری شده در واحد حجم جامد خاک است (V_s)، در حالیکه $\psi = \frac{E}{V}$ مقدار انرژی در واحد حجم کلی المان است. بنابراین $\phi = v\psi$ که در اینجا $v = \frac{V}{V_s}$ حجم ویژه (حجم مخصوص) نامیده می‌شود. برای مقدار انرژی E در یک سیستم بسته که شامل مقدار ذرات جامد ثابت در واحد حجم خاک است، ϕ همچنین ثابت خواهد بود، اما ψ با نسبت عکس با مقدار $v = 1 + e$ تغییر خواهد کرد به شکلی که مقدار $v\psi$ ثابت باقی می‌ماند. با توجه به اینکه رابطه (۱) برای هر حجم V معتبر است با انتگرال گیری از آن به رابطه زیر میرسیم (با فرض ثابت بودن دم):

$$\sigma : \delta \varepsilon \quad \bar{\Sigma} = \delta \psi \quad (2)$$

که در این رابطه $\bar{\Sigma} = T \cdot \rho \geq 0$ بیانگر نرخ زایل شدن در حالت پلاستیسیته (خمیری) است، در این حالت فرض می‌شود که زایل شدن منحصر اختصاص داده شود به نحوه قرارگیری مجدد ذرات یا همان ساختار(فابریک) که با n مجموعه از متغیرهای داخلی ξ_i اندازه‌گیری می‌شود (گوو و سو ۲۰۰۷، ونگ و همکاران ۲۰۱۹ و اسایاه و همکاران ۲۰۲۲) [۷-۹] بنابراین:

$$\bar{\Sigma} = \xi_i \delta \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

در این رابطه ξ_i نیروهای دینامیکی مرتبط با زایل شدگی $\delta \xi_i$ می‌باشند. رابطه‌ی اساسی فوق بعنوان چهارچوب اصلی متغیرهای داخلی برای تئوری پلاستیسیته خاک است. این نکته اهمیت زیادی دارد که $\bar{\Sigma}$ اندازه‌گیری زایل شدگی در واحد حجم می‌باشد و ξ_i مقادیر شدت آن (مانند تنش). به همین دلیل $\delta \xi_i$ برای هماهنگی با تعریف $\bar{\Sigma}$ می‌بایستی اندازه‌گیری تغییرات ساختار خاک در واحد حجم باشد. به طور مثال، در مدل معروف کم-کلی که نشان‌دهنده تئوری حالت بحرانی خاک است، تنها متغیر داخلی ساختار خاک v^p (تغییر واحد حجم ساختار ایزوتروپیک خاک) است. با بسط رابطه (۳) برای خاک‌ها خواهیم داشت (لی و دافالیاس ۲۰۱۵) [۵]:

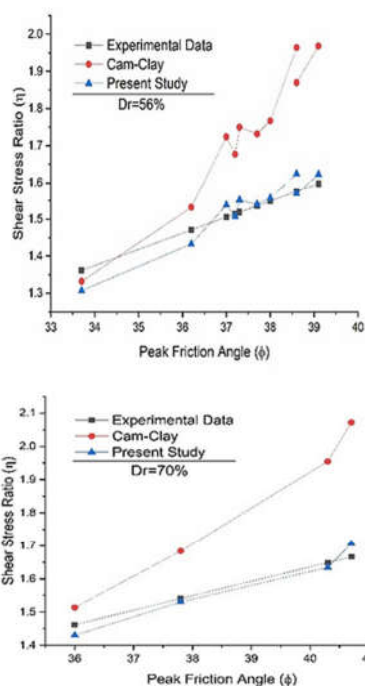
$$\bar{\Sigma} = L \cdot \delta v^p + \Theta \cdot \delta F = \bar{\Sigma}_v + \bar{\Sigma}_F \quad (4)$$

در این رابطه $\bar{\Sigma}_v$ زایل شدن انرژی برای قسمت ایزوتروپ (همسانگرد) خاک و وابسته به v^p می‌باشد $\bar{\Sigma}_F$ زایل شدن انرژی برای قسمت غیر ایزوتروپ (ناهمسان) خاک و وابسته به F تانسور ناهمسانی خاک است. لازم به ذکر است که L و Θ به ترتیب نیروهای ترمودینامیکی مزدوج قسمت همسان و ناهمسان هستند. با توجه به اینکه در مدل کم-کلی اثرات ناهمسانی لحاظ نشده و خاک بصورت ایزوتروپ (همسان) در نظر گرفته شده است، رابطه (۴) بصورت زیر در خواهد آمد:

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{v} (L : \delta v^p) \quad (5)$$

۲-۲- منحصر بفرود بودن خط حالت بحرانی

مطابق با شرایط تعادل گیبس، انرژی هلمهولتز ویژه ϕ در حالت بحرانی (حالت پایدار ترمودینامیکی) منحصر تابعی است از چگالی مصالح، به بیان دیگر $\phi = \phi(v)$. با توجه به اینکه در حالت بحرانی تغییرات حجم و تنش ثابت است، پاسخ‌های حجمی و برشی کاملاً از هم جدا شده و با جریان برش پایدار و حالت حجمی متعادل ثابت تعریف می‌شود (کولینز و کلی ۲۰۰۲، لی



شکل ۱. مقایسه مدل ارائه شده در این تحقیق با مدل کم-کلی با توجه به داده‌های آزمایشگاهی

۴- نتیجه گیری

در روابط پایه مکانیک خاک که براساس اصول ترمودینامیک ایجاد می‌شوند، سازگاری بین پارامترهای اصلی سو یکی از اصول ترمودینامیک برای در نظر گرفتن تغییرات حجم بر اساس حجم ویژه $v = 1 + e$ در مدل کم-کلی به انجام رسید. یکی از ایرادات مدل کلاسیک کم-کلی در خصوص نقض اصل دوم ترمودینامیک بود که در این تحقیق با مرتبط کردن آن به پارامترهای حجم ویژه و زایل شدن انرژی در چهارچوب مکانیک خاک حالت بحرانی و مدل کم-کلی رابطه‌ای بدست آمد که می‌تواند بهتر مقاومت برشی خاک را بدست دهد. لازم به ذکر است که مدل کم-کلی خاک را در ایزوتروپ (همسان) بررسی و زایل شدن را به فقط قسمت کرنش‌های برشی مرتبط کرده بود. روابطی که در این مقاله ارائه شده‌اند نیز این محدودیت‌ها را دارند و حالت ناهمسانی در اینجا لحاظ نشده است. مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی برای حالت سه محوری، درستی رابطه ارائه شده به نسبت مدل اصلی کم-کلی را نشان می‌دهد.

مراجع

1. Taylor, D., *Fundamentals of Soil Mechanics*. Jon Wiley & Sons Inc, 1948.
2. Newland, P. and B. Allely, *Volume changes in drained taixial tests on granular materials*. Geotechnique, 1957. 7(1): p. 17-34. doi:10.1680/geot.1957.7.1.17
3. Poorooshasb, H. and K. Roscoe. *The correlation of the results of shear tests with varying degrees of dilatation*. in *Proc., 5th Int. Conf. on Soil Mechanics*. 1961. (1), p. 297-304
4. NASSER, S.N., *On behavior of granular materials in simple shear*. Soils and Foundations, 1980. 20(3): p. 59-73. doi:10.3208/sandf1972.20.3_59

در این رابطه $\eta = \frac{q}{p}$ نسبت تنش برشی به تنش همه جانبه است. وابستگی M به تغییرات چگالی (یا به بیان دیگر نسبت منافذ e) بعدها توسط مویروود و همکاران (۱۹۹۴)، منطری و دافالیاس (۱۹۹۷)، لی و دافالیاس (۲۰۰۰) و سایر محققین دیگر [۱۳-۱۷] مورد بررسی و اصلاح قرار گرفته است. در این رابطه η از دو قسمت اصلی تشکیل شده است یکی مقاومت اصطکاکی M و دیگری اتساع (دیلاتنسی) $D = \frac{\delta \varepsilon_p}{\delta \varepsilon_q}$ عوامل متعددی در این دو قسمت تاثیرگذار هستند مثل نسبت منافذ اولیه، فشار همه جانبه و ناهمسانی [۸، ۱۸، ۱۹] ولی با توجه به موضوع مقاله و اینکه از بحث اصلی موضوع خارج است، به آن پرداخته نمی‌شود و فقط از حیث تغییر در رابطه کم-کلی برای بهتر کردن رفتار خاک و همچنین اعمال قوانین ترمودینامیک در اینجا ارائه شده است.

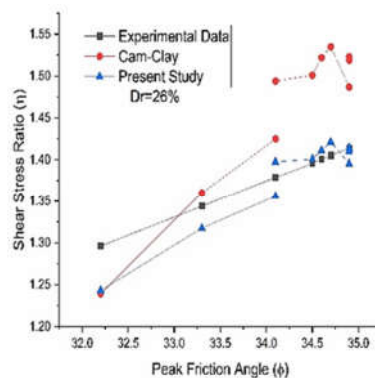
۳- نتایج و بحث

واید و ساسیتاران (۱۹۹۱) [۲۰] یکسری آزمایش برای بررسی مقاومت برشی خاکهای ماسه‌ای بر روی ماسه ارکساک انجام دادند و علاوه بر حالت سه محوری مسیره‌های مختلف تنش را نیز مورد مطالعه قرار دادند. در این آزمایش‌ها علاوه بر مقاومت برشی، داده‌های اتساع (دیلاتنسی) را هم ارائه نموده‌اند. این آزمایش‌ها در سه درجه تراکم مختلف انجام گرفته‌اند. درجه تراکم‌های نسبی ۲۶، ۵۶، ۷۰ درصد. در این آزمایش‌ها همچنین فشارهای محصورشدگی σ_3 مختلفی از تقریباً ۵۰ تا ۲۴۰۰ کیلو پاسکال بر نمونه‌ها اعمال شده است. داده‌های حالت بحرانی و معادله خط حالت بحرانی برای ماسه ارکساک از داده‌های آزمایشگاهی بین و همکاران (۲۰۰۰) و بین و جفریز (۱۹۸۵) [۲۱، ۲۲] بدست آمده‌اند (جدول ۱). بدلیل در دسترس بودن داده‌های اتساع خاک این آزمایش برای مدل‌سازی و صحت سنجی مورد استفاده قرار گرفته است.

جدول ۱. داده‌های حالت بحرانی ماسه ارکساک [۲۱، ۲۲]

M	1.25
λ	0.023
Γ	0.805
Critical state line equation	$e_c = \Gamma \lambda \ln(P') \forall P' \leq \sigma_x$ $e_c = g \quad LP'$
معادله خط	$e_c = g \quad LP' \forall P' > \sigma_x$ $g = \Gamma \lambda \ln(\sigma_x) + L\sigma_x$
حالت بحرانی	$\sigma_x = 700KPa, L = 6 \times 10^{-5}$

بر اساس داده‌ها و روابط ارائه شده می‌توان حداکثر مقاومت برشی η را بدست آورد. همانطوری که در شکل ۱ مشخص است، رابطه‌ی ارائه شده در این تحقیق بهتر از رابطه اصلی کم-کلی می‌تواند حداکثر مقاومت برشی خاک ماسه‌ای ارکساک را مدل کند.



5. Li, X. and Y. Dafalias, *Dissipation consistent fabric tensor definition from DEM to continuum for granular media*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2015. **78**: p. 141-153. doi:10.1016/j.jmps.2015.02.003
6. Roscoe, K.H., A. Schofield, and a.P. Wroth, *On the yielding of soils*. Geotechnique, 1958. **8**(1): p. 22-53. doi:10.1680/geot.1958.8.1.22
7. Guo, P. and X. Su, *Shear strength, interparticle locking, and dilatancy of granular materials*. Canadian Geotechnical Journal, 2007. **44**(5): p. 579-591. doi:10.1139/t07-010
8. Wang, R., W. Cao, and J.-M. Zhang, *Dependency of dilatancy ratio on fabric anisotropy in granular materials*. Journal of Engineering Mechanics, 2019. **145**(10): p. 04019076. doi:10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001660
9. Essayah, A., T. Shire, and Z. Gao, *The relationship between contact network and energy dissipation in granular materials*. Granular Matter, 2022. **24**(4): p. 100. doi:10.1007/s10035-022-01255-1
10. Collins, I.F. and P. Kelly, *A thermomechanical analysis of a family of soil models*. Géotechnique, 2002. **52**(7): p. 507-518. doi:10.1680/geot.2002.52.7.507
11. Collins, I. and G. Houlby, *Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1997. **453**(1964): p. 1975-2001. doi: 10.1098/rspa.1997.0107
12. Schofield, A.N., *Behaviour of a soil paste continuum*. 2000: University of Cambridge, Department of Engineering.
13. Manzari, M.T. and Y.F. Dafalias, *A critical state two-surface plasticity model for sands*. Géotechnique, 1997. **47**(2): p. 255-272. doi:10.1680/geot.1997.47.2.255
14. Wood, D.M. and K. Belkheir, *Strain softening and state parameter for sand modelling*. Géotechnique, 1994. **44**(2): p. 335-339. doi:10.1680/geot.1994.44.2.335
15. Li, X.S. and Y.F. Dafalias, *Dilatancy for cohesionless soils*. Géotechnique, 2000. **50**(4): p. 449-460. doi:10.1680/geot.2000.50.4.449
16. Collins, I., B. Muhunthan, and B. Qu, *Thermomechanical state parameter models for sands*. Géotechnique, 2010. **60**(8): p. 611-622. doi:10.1680/geot.8.P.127
17. Collins, I., et al., *The concept of a 'Reynolds-Taylor state' and the mechanics of sands*. Géotechnique, 2007. **57**(5): p. 437-447. doi:10.1680/geot.2007.57.5.437
18. Shaverdi, H., M.R. Taha, and F. Kalantary, *A flow rule incorporating the fabric and non-coaxiality in granular materials*. Granular Matter, 2014. **16**: p. 675-685. doi:10.1007/s10035-014-0525-1
19. Shi, K., F. Zhu, and J. Zhao, *The critical state of crushable granular sand*. Acta Geotechnica, 2024. **19**(1): p. 1-18. doi:10.1007/s11440-023-02112-y
20. Vaid, Y. and S. Sasitharan, *The strength and dilatancy of sand*. Canadian Geotechnical Journal, 1992. **29**(3): p. 522-526. doi:10.1139/t92-058
21. Been, K. and M.G. Jeffries, *A state parameter for sands*. Géotechnique, 1985. **35**(2): p. 99-112. doi:10.1680/geot.1985.35.2.99
22. Jeffries, M. and K. Been, *Implications for critical state theory from isotropic compression of sand*. Géotechnique, 2000. **50**(4): p. 419-429. doi:10.1680/geot.2000.50.4.419