

Proof of stability of linear and non-linear TSK type-2 fuzzy systems

Mohammadamin Shirkhani ^{1,*}, Seyedeh Sara Karimizad ² and Zohreh Dadvand ¹

¹Department of Electrical Engineering, Ilam University, Ilam, Iran

²Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Ilam University, Ilam, Iran

E-mails: ma.shirkhani@ilam.ac.ir; s.karimizad@ilam.ac.ir; zohreh.dadvand@gmail.com

*Corresponding author

Abstract

Control systems are progressing day by day and providing new methods in order to improve the obtained results. Fuzzy systems, which are one of the best control methods, are widely used in various applications today. With the improvements made in these systems, a new type of these systems called type-2 fuzzy systems was proposed. Due to their more up-to-date structure which have more control parameters than the type-1 fuzzy system, these systems can provide better results than this systems. Like other systems, the stability of these systems is a fundamental challenge in control systems. In this paper, the necessary and sufficient conditions for the stability of two classes of type-2 fuzzy systems are considered. At first, a class of type-2 TSK fuzzy systems with a linear "then" section and then a nonlinear "then" section are examined. It should be noted that in this paper, type 2 TSK fuzzy systems are considered as open loops. In the simulation section, two stable and unstable type 2 fuzzy systems are investigated and as shown, the results confirm the correctness of the analysis.

Keywords

Stability Analysis, TSK Fuzzy System, Type-2 Fuzzy Logic.

اثبات پایداری سیستم‌های فازی نوع-۲ TSK خطی و غیرخطی

محمدامین شیرخانی^{۱*}، سیده سارا کریمی زاد^۲ و زهره دادوند^۱^۱ گروه مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه ایلام، ایلام، ایران^۲ گروه ریاضیات، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ایلام، ایلام، ایرانایمیل نویسندگان: ma.shirkhani@ilam.ac.ir; s.karimizad@ilam.ac.ir; zohreh.dadvand@gmail.com

چکیده

سیستم های کنترلی روز به روز در حال پیشرفت و ارائه روش های جدیدی به منظور بهبود نتایج بدست آمده می باشد. سیستم های فازی که یکی از بهترین روش های کنترلی می باشد، امروزه به صورت وسیعی و در کاربردهای مختلفی مورد استفاده قرار می گیرد. با پیشرفت های انجام شده در این سیستم ها، نوع جدیدی از این سیستم های به نام سیستم های فازی نوع-۲ پیشنهاد شد. این سیستم ها با توجه به ساختار به روز تر خود که دارای پارامترهای کنترلی بیشتری نسبت به سیستم فازی نوع-۱ هستند، می توانند نتایج بهتری را نسبت به این سیستم ها ارائه دهند. مانند سیستم های دیگر، پایداری این سیستم ها، یک چالش اساسی در سیستم های کنترلی می باشد. در این مقاله شروط لازم و کافی برای پایداری دو کلاس از سیستم های فازی نوع-۲ بررسی می شوند. در ابتدا کلاسی از سیستم های فازی نوع-۲ TSK با قسمت "آنگاه" خطی و سپس با قسمت "آنگاه" غیرخطی مورد بررسی قرار می گیرند. لازم به ذکر است که در این مقاله سیستم های فازی نوع-۲ TSK بصورت حلقه باز در نظر گرفته شده اند. در قسمت شبیه سازی با دو سیستم فازی نوع-۲ پایدار و ناپایدار مورد بررسی قرار می گیرند و همانطور که نشان داده شده است، نتایج صحت تحلیل را تایید می کنند.

کلمات کلیدی

تحلیل پایداری، سیستم فازی TSK، منطق فازی نوع-۲.

نام نویسنده مسئول: محمدامین شیرخانی

ایمیل نویسنده مسئول: ma.shirkhani@ilam.ac.ir

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۱/۱۶

تاریخ (های) اصلاح مقاله: ۱۴۰۲/۰۲/۱۹

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۲/۲۲

۱- مقدمه

اشکال آن وابستگی تجزیه و تحلیل پایداری به توابع عضویت فازی است. این بدان معناست که پایداری سیستم به دقت توابع عضویت فازی مورد استفاده بستگی دارد، که تخمین دقیق آن می تواند دشوار باشد. این می تواند منجر به تجزیه و تحلیل پایداری نادرست و در نتیجه نتایج نادرست شود. علیرغم این اشکال، این روش یک مزیت متمایز را ارائه می دهد که به تابع لیاپانوف نیاز ندارد، به این معنی که می توان از آن در شرایطی استفاده کرد که چنین تابعی در دسترس نیست. در این مقاله [12]، از روش مستقیم تابع لیاپانوف برای تحلیل پایداری سیستم فازی نوع ۲ (PID) استفاده شده است. تابع لیاپانوف به هشت روش مختلف برای بدست آوردن شرایط پایداری سیستم فازی PD (PID) ساخته شده است. ابتدا، یک تابع لیاپانوف با استفاده از قانون کنترل بازخورد حالت استاتیک برای تعیین پایداری سیستم حلقه بسته فرموله می شود. دوم، تابع لیاپانوف برای استخراج شرایط پایداری سیستم تحت قانون کنترل پویا-بازخورد حالت استفاده می شود. سوم، معیارهای پایداری سیستم فازی PD (PID) بر اساس تابع لیاپانوف با معرفی یک تابع مشترک لیاپانوف مشتق شده است. چهارم، تابع لیاپانوف برای تجزیه و تحلیل پایداری سیستم در حضور اغتشاشات خارجی استفاده می شود. پنجم، تابع لیاپانوف برای استخراج شرایط پایداری سیستم فازی PD (PID) در حضور تاخیرهای زمانی استفاده می شود. ششم، تابع لیاپانوف برای تجزیه و تحلیل پایداری سیستم در حضور عدم قطعیت ها استفاده می شود. هفتم، تابع لیاپانوف برای استخراج

همانطور که می دانیم در سال های اخیر منطق و سیستم های فازی رشد بسیار گسترده ای داشته است. لطفی زاده در سال ۱۹۶۵ طی مقاله ای منطق فازی نوع-۱ را معرفی کرد. ده سال بعد، یعنی در سال ۱۹۷۵، منطق فازی نوع-۲ را برای حل برخی مشکلات منطق فازی نوع-۱، معرفی نمود [۱]. درجه عضویت در فازی نوع-۱، یک عدد غیر فازی است اما در فازی نوع-۲، درجه عضویت یک عدد فازی است. نبود اثبات ریاضی و تحلیل ریاضی این گونه سیستم ها گاهی مشکلاتی را بوجود می آورد. یکی از مسائل مهم در این زمینه بحث تحلیل پایداری است. در زمینه تحلیل پایداری سیستم های فازی نوع-۱ مقالات مختلف و متعددی ارائه شده است [۴-۲]. مقالاتی هم در مورد تحلیل پایداری سیستم های فازی نوع-۲ ارائه شده اند [۵-۱۰]. در [۵] تحلیل پایداری سیستم فازی نوع-۲ در حالت حلقه بسته و بر اساس مدل فازی مطرح شده است. آنها با حل مساله نامعادلات ماتریسی بر اساس تابع لیاپانوف مساله پایداری کلاسی از سیستم های فازی نوع-۲ را بررسی کرده اند. در [۱۰] آنالیز پایداری سیستم های فازی نوع-۲ در دو حالت: ۱- سیستم و کنترل کننده فازی نوع-۲ و ۲- سیستم فازی نوع-۱ و کنترل کننده فازی نوع-۲، بررسی کرده اند. در [۱۱] تحلیل پایداری سیستم های حلقه باز فازی نوع-۱ و نوع-۲ مطرح شده است. روش ارائه شده در این مقاله دارای مزیت عدم نیاز به یک تابع مشترک لیاپانوف است که یک مزیت عمده نسبت به روش های دیگر است. با این حال،

فازی نوع-۲ در نظر گرفته شود. در این حالت یک عدد دو بار فازی می‌شود. ابتدا از رابطه (۲) تمامی x ها فازی سازی می‌شوند.

$$\mu_1 = \exp\left(-0.5 * \frac{(x-M)^2}{\sigma_x^2}\right) \quad (2)$$

در این حالت μ_1 را عضویت اولیه می‌نامند و M مرکز تابع عضویت است. درجه عضویت μ_1 (یعنی μ_2) از رابطه (۳) محاسبه می‌شود.

$$\mu_2(x, \mu_1) = \exp\left(-0.5 * \frac{(a-\mu_1(x))^2}{\sigma_m^2}\right) \quad (3)$$

در رابطه (۳)، $a \in [0.1]$ دامنه توابع عضویت ثانویه است. $\mu_2(x, \mu_1)$ درجه عضویت ثانویه می‌نامند. توجه شود، این حالت نیز همانند دو حالت قبل، با اعمال هر x یک درجه عضویت بدست نمی‌آید؛ بلکه یک مجموعه از درجه عضویت‌ها محاسبه خواهند شد.

۳- تحلیل پایداری سیستم فازی نوع-۲ با قسمت آنگاه خطی

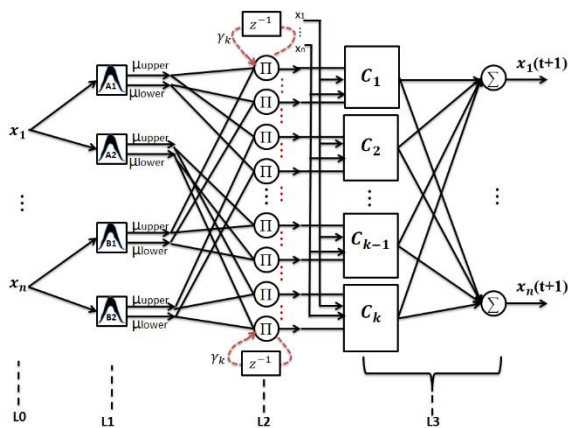
در این قسمت روشی نو جهت تحلیل پایداری کلاسی از سیستم‌های فازی نوع-۲ TSK بازگشتی با قسمت آنگاه خطی ارائه می‌شود. یک قاعده فازی به صورت زیر تعریف می‌شود. لازم به ذکر است که در اینجا $x(k)$ حالت سیستم در لحظه k است که از فیدبک یک واحد تاخیر خروجی سیستم بدست آمده و به عنوان ورودی اعمال می‌گردد و همچنین $x(k+1)$ حالت سیستم در لحظه $k+1$ و خروجی سیستم است.

$$R^j : \text{if } x_1(k) \text{ is } \tilde{A}_1^j \text{ and } \dots \text{ and } x_n(k) \text{ is } \tilde{A}_n^j \text{ then } X^j(k+1) = C^j X(k)$$

سیستم فوق یک سیستم فازی نوع-۲ TSK چند ورودی چند خروجی (MIMO) بازگشتی با قسمت آنگاه خطی است. $X^j(k+1)$ خروجی قاعده j ام در لحظه $k+1$ است. در این سیستم $i = 1.2. \dots n$ حالت‌های سیستم، \tilde{A}_i^j $i = 1.2. \dots n$ توابع عضویت فازی نوع-۲ گوسی و $C^j \in R^{n \times n}$ ماتریس ضرایب است. بنابراین

$$\begin{bmatrix} x_1^j(k+1) \\ \vdots \\ x_n^j(k+1) \end{bmatrix} = C^j \begin{bmatrix} c_{11}^j & \dots & c_{1n}^j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^j & \dots & c_{nn}^j \end{bmatrix} \cdot X(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

ساختار سیستم فازی نوع-۲ فوق در شکل ۳ نمایش داده شده است.



شکل ۳- سیستم فازی نوع-۲ ارائه شده

در شکل فوق، لایه صفر لایه ورودی‌هاست، لایه اول لایه فازی ساز است که در آن

$${}^1\mu_{j,i}(x_i, [\sigma_{j,i}, {}^1m_{j,i}]) = e^{-0.5 \left(\frac{x_i - {}^1m_{j,i}}{\sigma_{j,i}} \right)^2} \quad (4)$$

$${}^2\mu_{j,i}(x_i, [\sigma_{j,i}, {}^2m_{j,i}]) = e^{-0.5 \left(\frac{x_i - {}^2m_{j,i}}{\sigma_{j,i}} \right)^2}$$

شرایط پایداری سیستم تحت قانون کنترل خروجی-بازخورد دینامیکی استفاده می‌شود. در نهایت، تابع لیاپانوف برای تجزیه و تحلیل پایداری سیستم فازی (PID) در حضور عدم قطعیت‌های همسان استفاده می‌شود. همه این روش‌ها برای تجزیه و تحلیل پایداری سیستم فازی (PID) و به دست آوردن معیارهای پایداری استفاده می‌شود.

۲- مجموعه های فازی نوع-۲

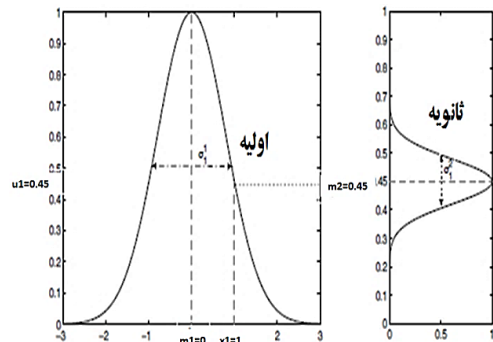
در این مجموعه ها، درجه عضویت در مجموعه های فازی نوع-۱ خود نیز یک عدد فازی است. زمانی که نامعینی داده ها زیاد باشد به طوری که نتوان یک مقدار عددی برای درجه عضویت تعیین نمود بایستی یک عدد فازی برای درجه عضویت انتخاب نمود و عدد بدست آمده از دو بار عمل فازی سازی، را یک عدد فازی نوع-۲ کلی می‌نامند [۱۱]. در اینجا عضویت اولیه و ثانویه تعریف می‌شوند (شکل ۱). شکل ۱ نشان دهنده توابع اولیه و ثانویه در یک عدد فازی نوع-۲ کلی می‌باشد.

به عنوان مثال برای $x_1 = 1$ ، $\mu_1 = 0.45$ است. در این حالت مرکز تابع عضویت ثانویه برابر ۰.۴۵ است.

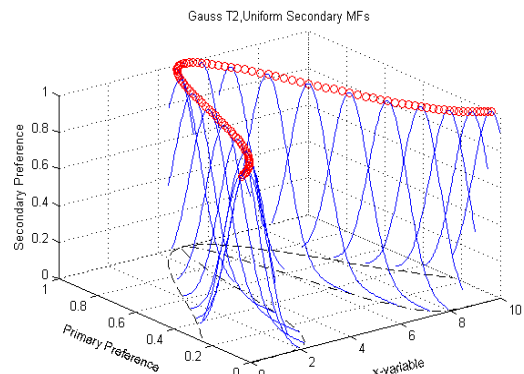
در شکل ۲ نمایی سه بعدی از یک مجموعه فازی نوع-۲ نشان داده شده است.

یک مجموعه فازی نوع-۲ در حالت کلی به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) / x = \frac{\int_{x \in X} \int_{\mu \in J_x} \frac{f_x(\mu)}{\mu}}{x} \quad (1)$$



شکل ۱- توابع عضویت اولیه و ثانویه در یک عدد فازی نوع-۲ کلی



شکل ۲- توابع عضویت اولیه و ثانویه در یک عدد فازی نوع-۲ کلی

در رابطه (۱) \tilde{A} یک مجموعه فازی نوع-۲، $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت اولیه، J_x مجموعه درجات عضویت اولیه از $x \in X$ و $f_x(\mu) \in [0.1]$ تابع عضویت ثانویه است.

برای تفهیم بیشتر، فرض کنید تابع عضویت گوسی برای تحقق یک عدد

مخرج کسر فوق همواره مثبت است. طبق لم ۱، $C^j T P C^j + C^{jT} P C^j - 2P < 0$ بنابراین برای تضمین اینکه $\nabla V(x(k)) < 0$ شود می‌بایست داشته باشیم، $C^j T P C^j - P < 0$

۴- اثبات پایداری کلاسی از سیستم فازی نوع-۲ TSK با قسمت آنگاه غیرخطی

در این قسمت شرط لازم جهت تحلیل پایداری کلاسی از سیستم‌های فازی نوع-۲ TSK بازگشتی با قسمت آنگاه غیرخطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. هر قاعده فازی از سیستم مذکور به فرم زیر است.

$$\text{then } X^j(k+1) = R^j: \text{if } x_1(k) \text{ is } \bar{A}_1^j \text{ and } \dots \text{ and } x_n(k) \text{ is } \bar{A}_n^j \\ C^j \phi(X(k)) \quad (11)$$

$$X^j(k+1) = \begin{bmatrix} x_1^j(k+1) \\ \vdots \\ x_n^j(k+1) \end{bmatrix} \quad C^j = \begin{bmatrix} c_{11}^j & \dots & c_{1n}^j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^j & \dots & c_{nn}^j \end{bmatrix} \quad \phi(X(k)) = \begin{bmatrix} \phi(x_1(k)) \\ \vdots \\ \phi(x_n(k)) \end{bmatrix} \quad (11)$$

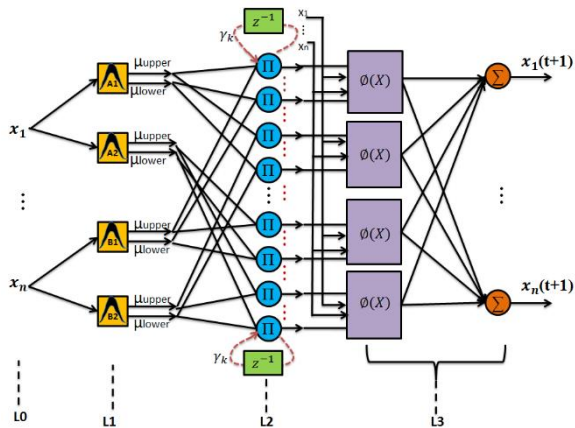
که در آن $x_i(k)$ $i = 1.2. \dots. n$ حالت‌های سیستم، \bar{A}_i^j $i = 1.2. \dots. n$ توابع عضویت فازی نوع-۲، c_{ij}^j $i = 1.2. \dots. n$ $j = 1.2. \dots. n$ ضرایب عددی و $n \times (k+1)$ قسمت نتیجه قاعده j ام در لحظه $k+1$ است. همچنین $\phi \in OL$ (Odd & Lipschitz): $= \{\phi: R \rightarrow R \mid \forall s, t \in R, |\phi(s) + \phi(t)| \leq |s + t|\}$

به عبارت دیگر تابع $\phi(t)$ هم لیبشیتز و هم فرد است.

تعریف [۱۶]: یک ماتریس را مثبت معین و با قطر غالب گویند اگر $P > 0$ (positive definite) $\forall i$ $|p_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |p_{ij}|$ (12)

لم [۱۲]: اگر ماتریس P شرایط فوق را داشته باشد، آنگاه $P > 0$ $\forall \phi \in OL, \forall x \in R^n, \phi(x)^T P \phi(x) \leq x^T P x$ (13)

ساختار سیستم (۷) در شکل ۴ ارائه شده است.



شکل ۴- سیستم فازی نوع-۲ بازگشتی با قسمت آنگاه غیرخطی

که در آن، لایه صفر که لایه ورودی است، لایه یک لایه فازی ساز است و عملیات زیر انجام می‌شود.

$$\mu_{j,i}^1(x_i, [\sigma_{j,i}, {}^1m_{j,i}]) = e^{-5 \left(\frac{x_i - {}^1m_{j,i}}{\sigma_{j,i}} \right)^2}$$

$$\mu_{j,i}^2(x_i, [x_i, [\sigma_{j,i}, {}^2m_{j,i}]]) = e^{-5 \left(\frac{x_i - {}^2m_{j,i}}{\sigma_{j,i}} \right)^2}$$

درجه عضویت بالا و پایین بصورت زیر محاسبه می‌گردد.

در روابط فوق، x_i ورودی، $\sigma_{j,i}$ عرض تابع عضویت گوسی، ${}^1m_{j,i}$ و ${}^2m_{j,i}$ به ترتیب حد پایین و حد بالای مرکز تابع عضویت گوسی هستند. درجه عضویت بالا و پایین بصورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\bar{\mu}_{j,i}(x_i) = \begin{cases} {}^1\mu_{j,i}(x_i, [\sigma_{j,i}, {}^1m_{j,i}]), & x_i < {}^1m_{j,i} \\ 1, & {}^1m_{j,i} \leq x_i \leq {}^2m_{j,i} \\ {}^2\mu_{j,i}(x_i, [\sigma_{j,i}, {}^2m_{j,i}]), & x_i > {}^2m_{j,i} \end{cases} \quad (5)$$

$$\underline{\mu}_{j,i}(x_i) = \begin{cases} {}^2\mu_{j,i}(x_i, [\sigma_{j,i}, {}^2m_{j,i}]), & x_i \leq \frac{{}^1m_{j,i} + {}^2m_{j,i}}{2} \\ {}^1\mu_{j,i}(x_i, [\sigma_{j,i}, {}^1m_{j,i}]), & x_i > \frac{{}^1m_{j,i} + {}^2m_{j,i}}{2} \end{cases}$$

لایه دوم لایه قواعد است. در این لایه محاسبات زیر انجام می‌شود.

$$\underline{f}^j(k) = (1 - \gamma_j) \prod_{i=1}^n \underline{\mu}_{j,i} + \gamma_j \underline{f}^j(k-1)$$

$$\bar{f}^j(k) = (1 - \gamma_j) \prod_{i=1}^n \bar{\mu}_{j,i} + \gamma_j \bar{f}^j(k-1) \quad (6)$$

در لایه سوم خروجی محاسبه می‌گردد.

$$\hat{X}(k+1) = \frac{\sum_{j=1}^p \underline{f}^j C^j X(k) + \sum_{j=1}^p \bar{f}^j C^j X(k)}{\sum_{j=1}^p \underline{f}^j + \sum_{j=1}^p \bar{f}^j} \quad (7)$$

جهت تحلیل پایداری ابتدا لم ۱ را در نظر بگیرید.

لم ۱: اگر P یک ماتریس مثبت معین باشد و داشته باشیم، $A^T P A - P < 0$ $B^T P B - P < 0$ آنگاه خواهیم داشت،

$$A^T P B + B^T P A - 2P < 0$$

اثبات: با توجه به اینکه P یک ماتریس مثبت معین است، خواهیم داشت،

$$(A - B)^T P (A - B) > 0$$

$$A^T P A - A^T P B - B^T P A + B^T P B > 0$$

$$A^T P A + B^T P B > A^T P B + B^T P A$$

$$A^T P B + B^T P A < A^T P A + B^T P B < 2P \quad (8)$$

$$A^T P B + B^T P A - 2P < 0$$

قضیه: نقطه تعادل $x_e = 0$ سیستم (۶) پایدار مجانبی است اگر ماتریس

$$C^j T P C^j - P < 0$$

مثبت معین P چنان موجود باشد که $C^j T P C^j - P < 0$

که در آن $j = 1.2. \dots. p$ شماره قاعده فازی است.

اثبات: فرض کنید کاندید تابع لیاپانوف به صورت زیر باشد.

$$V(x(k)) = x^T(k) P x(k)$$

که در آن، P یک ماتریس مثبت معین است. می‌بایست نشان دهیم که

تغییرات تابع لیاپانوف منفی است یعنی $\nabla V(x(k)) = x^T(k+1) P x(k) - x^T(k) P x(k) < 0$

$$\nabla V(x(k)) = x^T(k) \left[\begin{matrix} \left(\frac{\sum_{j=1}^p (\underline{f}^j(k+1) + \bar{f}^j(k+1)) C^j T}{\sum_{j=1}^p \underline{f}^j(k+1) + \sum_{j=1}^p \bar{f}^j(k+1)} \right) P \\ \left(\frac{\sum_{j=1}^p (\underline{f}^j(k+1) + \bar{f}^j(k+1)) C^j}{\sum_{j=1}^p \underline{f}^j(k+1) + \sum_{j=1}^p \bar{f}^j(k+1)} \right) - P \end{matrix} \right] x(k)$$

$$= \frac{\left(\underline{f}^j(k+1) + \bar{f}^j(k+1) \right)^* \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p \left(\underline{f}^l(k+1) + \bar{f}^l(k+1) \right) x^T(k) (C^l T P C^l - P) x(k)}{\sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p \left(\underline{f}^l(k+1) + \bar{f}^l(k+1) \right)^*} \quad (9)$$

با مرتب سازی رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\nabla V(x(k)) = \frac{\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^p \left(\underline{f}^j(k+1) + \bar{f}^j(k+1) \right)^2 \\ x^T(k) (C^j T P C^j - P) x(k) + \sum_{j < l}^p \left(\underline{f}^j(k+1) + \bar{f}^j(k+1) \right) \left(\underline{f}^l(k+1) + \bar{f}^l(k+1) \right) x^T(k) \\ (C^j T P C^j + C^{lT} P C^l - 2P) x(k) \end{bmatrix}}{\sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p \left(\underline{f}^l(k+1) + \bar{f}^l(k+1) \right)} \quad (10)$$

$$C^T P C^i + C^{i T} P C^j - 2P < 0$$

با توجه به لم ۲،

$$\Phi^T(x(k)) P \Phi(x(k)) - x^T(k) P x(k) \leq 0$$

بنابراین برای تضمین اینکه $\nabla V(x(k)) < 0$ شود می بایست داشته باشیم،

$$C^T P C^j - P < 0 \quad (23)$$

۵- شبیه سازی

در ادامه جهت نشان دادن صحت روش اثبات پایداری سیستم فازی نوع-۲ با قسمت آنگاه خطی ابتدا یک سیستم تک ورودی - تک خروجی پایدار و یک سیستم تک ورودی - تک خروجی ناپایدار با استفاده از سیستم فازی نوع-۲ مدل سازی شده و سپس پایداری مدل بررسی می شود.

مثال: سیستم فازی نوع-۲ با قاعده فازی به شکل مقابل را در نظر بگیرید.

$$R^1: \text{ If } x(k) \text{ is } \bar{A}_1^1 \text{ and } \dots \text{ and } x(k-n+1) \bar{A}_n^1 \\ \text{ then } x^i(k+1) = c_1^i x(k) + c_2^i x(k-1) + \dots + c_n^i x(k-n+1)$$

(24)

که در آن خروجی نهایی به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^p x^i(k+1)(\bar{f}^i + \underline{f}^i)}{\sum_{i=1}^p (\bar{f}^i + \underline{f}^i)} \quad (25)$$

که در آن می توان نوشت:

$$X(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^p C^i X(k)(\bar{f}^i + \underline{f}^i)}{\sum_{i=1}^p (\bar{f}^i + \underline{f}^i)}$$

$$C^i = \begin{bmatrix} c_1^i & c_2^i & c_3^i & c_4^i & \dots & c_n^i \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$X(k) = [x(k) \quad x(k-1) \quad \dots \quad x(k-n+1)]^T$$

اکنون سیستم فازی نوع-۲ با دو قاعده معین زیر را در نظر

بگیرید. $\text{if } x(k-1) \text{ is } \bar{A}_1^1 \text{ then}$

$$\text{if } x(k-1) \quad x^1(k+1) = x(k) - 0.5x(k-1)$$

$1) \text{ is } \bar{A}_2^1 \text{ then}$

$$x^1(k+1) = -x(k) - 0.5x(k-1) \quad (27)$$

در این حالت ماتریس های قسمت آنگاه قواعد بصورت زیر هستند.

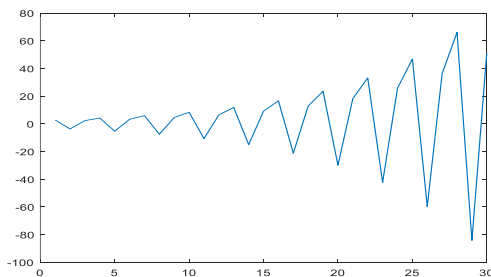
$$C^1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C^2 = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس ها بصورت زیر است.

$$Eig(C^1) = 0.5 \pm 0.5i \quad Eig(C^2) = -0.5 \pm 0.5i \quad (28)$$

بنابراین مقادیر ویژه هر دو ماتریس در داخل دایره واحد قرار می گیرد. اما

سیستم کلی ناپایدار است. شکل ۵، بیانگر سیستم ۱ است.



شکل ۵- سیستم (۱)

توابع عضویت این سیستم به صورت نشان داده شده در شکل ۶ ی باشد.

همچنین شکل ۷، بیانگر سیستم ۲ می باشد.

$$\bar{\mu}_{j,i}(x_i) = \begin{cases} {}^1\mu_{j,i}(x_i) \cdot [{}^1\sigma_{j,i}, {}^1m_{j,i}] & x_i < {}^1m_{j,i} \\ 1 & {}^1m_{j,i} \leq x_i \leq {}^2m_{j,i} \\ {}^2\mu_{j,i}(x_i) \cdot [{}^2\sigma_{j,i}, {}^2m_{j,i}] & x_i > {}^2m_{j,i} \end{cases} \quad (14)$$

$$\underline{\mu}_{j,i}(x_i) = \begin{cases} {}^2\mu_{j,i}(x_i) \cdot [{}^2\sigma_{j,i}, {}^2m_{j,i}] & x_i \leq \frac{{}^1m_{j,i} + {}^2m_{j,i}}{2} \\ {}^1\mu_{j,i}(x_i) \cdot [{}^1\sigma_{j,i}, {}^1m_{j,i}] & x_i > \frac{{}^1m_{j,i} + {}^2m_{j,i}}{2} \end{cases}$$

در لایه دوم عملیات قواعد انجام می شود.

$$\bar{f}^j(k) = (1 - \gamma_j) \prod_{i=1}^n \bar{\mu}_{j,i} + \gamma_j \bar{f}^j(k-1)$$

$$\bar{f}^j(k) = (1 - \gamma_j) \prod_{i=1}^n \bar{\mu}_{j,i} + \gamma_j \bar{f}^j(k-1) \quad (15)$$

که در آن، γ_j وزن فیدبک است که با سعی و خطا جهت دستیابی به عملکرد

بهتر تنظیم می گردد.

$$X(k+1) = \frac{\sum_{j=1}^p \bar{f}^j C^j \Phi(x(k)) + \sum_{j=1}^p \bar{f}^j C^j \Phi(x(k))}{\sum_{j=1}^p \bar{f}^j + \sum_{j=1}^p \bar{f}^j} \quad (16)$$

که در آن، $X(k+1)$ بردار حالت سیستم در لحظه $k+1$ است و همچنین

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix}$$

$$C^j = \begin{bmatrix} c_{11}^j & \dots & c_{1n}^j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}^j & \dots & c_{nn}^j \end{bmatrix}$$

$$\Phi(X(k)) = \begin{bmatrix} \Phi(x_1(k)) \\ \vdots \\ \Phi(x_n(k)) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}) &= \frac{\sum_{j=1}^p \bar{f}^j C^j \Phi(x(k)) + \sum_{j=1}^p \bar{f}^j C^j \Phi(x(k))}{\sum_{j=1}^p \bar{f}^j + \sum_{j=1}^p \bar{f}^j} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^p (\bar{f}^j + \underline{f}^j) C^j \Phi(x(k))}{\sum_{j=1}^p \bar{f}^j + \sum_{j=1}^p \underline{f}^j} \end{aligned}$$

قضیه: سیستم (۷) یا به عبارتی سیستم (۱۱) پایدار مجانبی است اگر

ماتریس P که یک ماتریس مثبت معین با قطر غالب است، وجود داشته باشد

بطوریکه برای هر قاعده (در اینجا قاعده زام)

$$C^j T P C^j - P < 0 \quad (18)$$

اثبات: ابتدا تابع لیاپانوف بصورت زیر در نظر بگیرید

$$\nabla V(x(k)) = x^T(k+1) P x(k+1) - x^T(k) P x(k) =$$

$$\Phi^T(x(k)) \left[\frac{\sum_{j=1}^p (\bar{f}^j(k+1) + \underline{f}^j(k+1)) C^j T}{\sum_{j=1}^p \bar{f}^j(k+1) + \sum_{j=1}^p \underline{f}^j(k+1)} P \right] \Phi(x(k)) - x^T(k) P x(k)$$

(19)

$$\Phi^T(x(k)) \left[\frac{\sum_{j=1}^p (\bar{f}^j(k+1) + \underline{f}^j(k+1)) C^j T}{\sum_{j=1}^p \bar{f}^j(k+1) + \sum_{j=1}^p \underline{f}^j(k+1)} P \right] \Phi(x(k)) - x^T(k) P x(k) -$$

$$x^T(k) P x(k) \quad (20)$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p (\bar{f}^l(k+1) + \underline{f}^l(k+1)) (\bar{f}^l(k+1) + \underline{f}^l(k+1)) \Phi^T(x(k)) (C^j T P C^l - P) \Phi(x(k))}{\sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p (\bar{f}^l(k+1) + \underline{f}^l(k+1)) (\bar{f}^l(k+1) + \underline{f}^l(k+1))} +$$

$$\Phi^T(x(k)) P \Phi(x(k)) - x^T(k) P x(k) \quad (21)$$

با مرتب سازی رابطه فوق خواهیم داشت.

$$\nabla V(x(k)) = \frac{\sum_{j=1}^p (\bar{f}^j(k+1) + \underline{f}^j(k+1))^2 \Phi^T(x(k)) (C^j T P C^j - P) \Phi(x(k)) + \sum_{j=1}^p (\bar{f}^j(k+1) + \underline{f}^j(k+1)) (\bar{f}^j(k+1) + \underline{f}^j(k+1)) \Phi^T(x(k)) (C^j T P C^j + C^j T P C^j - 2P) \Phi(x(k))}{\sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p (\bar{f}^l(k+1) + \underline{f}^l(k+1)) (\bar{f}^l(k+1) + \underline{f}^l(k+1))} +$$

$$\Phi^T(x(k)) P \Phi(x(k)) - x^T(k) P x(k) \quad (22)$$

در ترم اول، مخرج کسر فوق همواره مثبت است. طبق لم ۱،

است. برای این منظور معیارهای عملکردی مختلفی پیشنهاد و مطالعه شده است. به عنوان مثال، استفاده از توابع و روش های لیاپانوف به طور گسترده در زمینه سیستم های فازی نوع ۲ مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مقاله روش هایی جهت تحلیل پایداری چند کلاس مختلف از سیستم های فازی نوع-۲ بصورت حلقه باز ارائه شد. شروط کافی برای پایدار بودن این مدل ها بدست آمد. همچنین در شبیه سازی صحت روش تحلیل پایداری نشان داده شد.

مراجع

[1] L.A.Zadeh; "The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-I", Information Sciences, Vol. 8, pp: 199-249, 1975.

[2] K. Cao; X. Z. Gao; H. K. Lam; A. V. Vasilakos; W. Pedrycz; "A new relaxed stability condition for Takagi-Sugeno fuzzy control systems using quadratic fuzzy Lyapunov functions and staircase membership functions", International Journal of Fuzzy Systems, vol. 16, no. 3, pp. 327-337, 2014.

[3] H. K. Lam; L. Wu; Y. Zhao; "Linear matrix inequalities-based membership function-dependent stability analysis for non-parallel distributed compensation fuzzy-model-based control systems", IET Control Theory & Applications, vol.8, no. 8, pp. 614-625, 2014.

[4] Z. Ding; Y. Zhou; M. C. Zhou; "Stability analysis of switched fuzzy systems via model checking", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 22 , no. 6, pp. 1503-1514, 2014.

[5] H. K. Lam; L. D. Seneviratne; "Stability analysis of interval type-2 fuzzy-model-based control systems", IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics, vol. 38, no. 3, pp. 617-628, 2008.

[6] Mohammadi F, Mohammadi-Ivatloo B, Gharehpetian GB, Ali MH, Wei W, Erdinç O, Shirkhani M. Robust control strategies for microgrids: A review. IEEE Systems Journal. 2021 Jun 8.

[7] Tavooosi J, Shirkhani M, Abdali A, Mohammadzadeh A, Nazari M, Mobayen S, Asad JH, Bartoszewicz A. A new general type-2 fuzzy predictive scheme for PID tuning. Applied Sciences. 2021 Nov 5;11(21):10392.

[8] Huang H, Shirkhani M, Tavooosi J, Mahmoud O. A new intelligent dynamic control method for a class of stochastic nonlinear systems. Mathematics. 2022 Apr 22;10(9):1406.

[9] Danyali S, Aghaei O, Shirkhani M, Aazami R, Tavooosi J, Mohammadzadeh A, Mosavi A. A New Model Predictive Control Method for Buck-Boost Inverter-Based Photovoltaic Systems. Sustainability. 2022 Sep 19;14(18):11731.

[10] M. Biglarbegian; W. W. Melek; J. M. Mendel; "On the stability of interval type-2 TSK fuzzy logic control systems", IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics, vol. 40, no. 3, pp. 798-818, 2009.

[11] S. Jafarzadeh; M. S. Fadali; A. H. Sonbol; "Stability analysis and control of discrete type-1 and type-2 TSK fuzzy systems: part I. stability analysis", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 19, no. 6, pp. 989-1000, 2011.

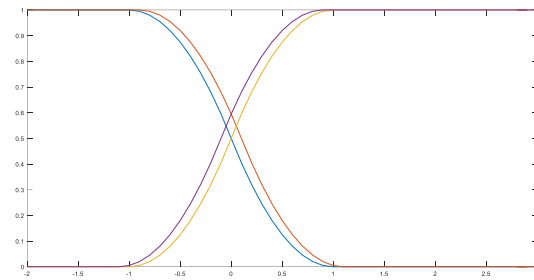
[12] T. Kumbasar; "Robust stability analysis of PD type single input interval type-2 fuzzy control systems", IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Beijing, China. July 6-11, 2014. [9]

[13] W. S. Yu; H. S. Chen; "Interval type-2 fuzzy adaptive tracking control design for PMDC motor with the sector dead-zones", Information Sciences, vol. 288, pp. 108-134, 2014.

[14] A. M. El-Nagar; M. El-Bardini; "Derivation and stability analysis of the analytical structures of the interval type-2 fuzzy PID controller", Applied Soft Computing, vol. 24, pp. 704-716, 2014.

[15] Wen-Hau Roger Jeng; Chi-Yuan Yeh; Shie-Jue Lee; "General Type-2 Fuzzy Neural Network with Hybrid Learning for Function Approximation", IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Korea, August 2009.

[16] Yun-Chung Chu; Keith Glover; "Bounds of the Induced Norm and Model Reduction Errors for Systems with Repeated Scalar Nonlinearities", IEEE Trans on Automatic Control, Vol. 44, No. 3, 1999.



شکل ۶- توابع عضویت سیستم (۱)

اکنون سیستم فازی نوع-۲ با دو قاعده معین زیر را در نظر بگیرید.

(۲)

if $x(k-1)$ is \tilde{A}_1^2 then
 if $x(k-1)$ is A_1^1 then

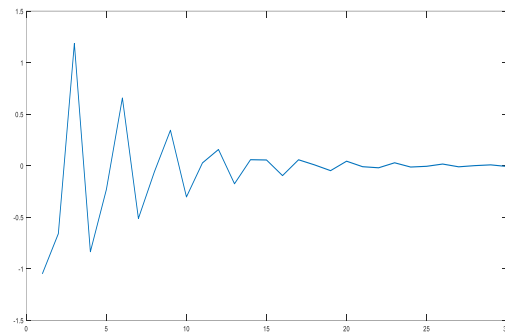
$$C^1 = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C^2 = \begin{bmatrix} -1 & -0.9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس ها بصورت زیر است. $Eig(C^1) = -0.5 \pm 0.5i$ $Eig(C^2) = -0.5 \pm 0.8i$

بنابراین مقادیر ویژه هر دو ماتریس در داخل دایره واحد قرار می گیرد.

سیستم کلی پایدار است (شکل) و ماتریس P بصورت زیر بدست می آید.

$$P = \begin{bmatrix} 1.7121 & 3.4272 \\ 2.9183 & 1.7121 \end{bmatrix}$$



شکل ۷- سیستم (۲)

۱- نتیجه گیری

سیستم های فازی نوع-۲ که نوع بهبود یافته ای از سیستم های فازی نوع-۱ می باشند، امروزه به دلیل ارائه نتایج بهتر نسبت سیستم های فازی نوع-۱، به شدت مورد توجه قرار گرفته اند. با توجه به کاربرد روز افزون سیستم های فازی نوع-۲ از یک طرف و اهمیت تحلیل پایداری سیستم ها از طرف دیگر، به نظر می رسد تحلیل پایداری سیستم های فازی نوع-۲ ضرورت داشته باشد. تجزیه و تحلیل پایداری سیستم های فازی نوع ۲ نیازمند یک رویکرد جامع است که هم ماهیت فازی سیستم و هم ویژگی های دینامیکی سیستم را در نظر می گیرد. در این راستا معیارها و روش های پایداری مختلفی پیشنهاد و تدوین شده است. این رویکردها شامل استفاده از ریاضیات فازی و دینامیک غیرخطی برای تجزیه و تحلیل خواص سیستم و اجزای منفرد آن است.

تجزیه و تحلیل سیستم های فازی نوع ۲ همچنین شامل ارزیابی ظرفیت آنها برای حفظ عملکرد آنها در طول عملیات است. این شامل ارزیابی توانایی سیستم برای حفظ رفتار مورد نظر خود در حضور عدم قطعیت ها و اختلالات